

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:
 $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 10

A2. α) Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Τι ονομάζεται συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i, i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

β) Έστω x_1, x_2, \dots, x_n οι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο $x_0=0$.

β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Ισχύει $(\eta \mu x)' = \sigma \nu x$

δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε °C) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: 22, 18, $20+\kappa$, 14, 16, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι ίση με

$$s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$$

Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x} = 20$

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι $\kappa = 10$ (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

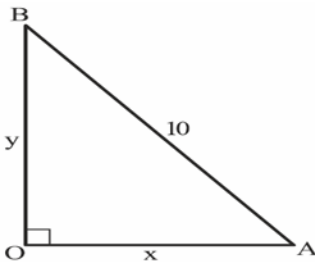
Μονάδες 9

Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο AOB με $\hat{O} = 90^\circ$, κάθετες πλευρές μήκους $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα μήκους $(AB) = 10$.



Δ1. Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο: $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ (μον. 3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (μον. 4).

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$, ως προς x , όταν $x = 8$.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6}$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $x_1 = 2,3$, $x_2 = 3,5$ και $x_3 = 2,8$ είναι τιμές της πλευράς x , να αιτιολογήσετε ότι: $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Μονάδες 6**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31

A2. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 65
β) Σχολικό βιβλίο σελ. 87

A3. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ

ΘΕΜΑ Β

Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

B1. $f'(x) = x^2 - 6x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$.

B2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 5$			
x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	↘	↗	
		T.M	T.E.		

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[5, +\infty)$.

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=5$ το $f(5) = \frac{125}{3} - 3 \cdot 25 + 25 \cdot \frac{1}{3} = -8$.

B3. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $A(0, f(0))$ έχει τη μορφή

$y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(0) = 5$ και $f(0) = \frac{1}{3}$. Επίσης, οι συντεταγμένες του σημείου $A(0, \frac{1}{3})$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε .

Άρα $\frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$. Επομένως, $\varepsilon: y = 5x + \frac{1}{3}$.

B4. Από τον ορισμό της παραγώγου της f στο x_0 έχουμε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 5 = 12$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1+7}{2} = 4$.

Γ2. $CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0,20 \Leftrightarrow \frac{4}{\bar{x}} = 0,20 \Leftrightarrow \bar{x} = 20$.

Γ3. $\bar{x} = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{90+\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 10$.

Τότε οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 14, 16, 18, 22, 30.

Το πλήθος $n=5$ περιττός άρα η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή $\delta=18$.

Γ4. Έστω y_1, y_2, \dots, y_5 οι τιμές μετά την αύξηση. Τότε $y_i = x_i + \frac{10}{100} \cdot x_i \Leftrightarrow y_i = 1,1 \cdot x_i$, για $i=1, 2, \dots, 5$

Τότε $\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x}$ και $s_y = 1,1 \cdot s_x$.

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1,1 \cdot s_x}{1,1 \cdot \bar{x}} = CV_x = 20\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2} \quad y > 0$$

Πρέπει $100 - x^2 > 0$ και $x > 0$. Άρα $0 < x < 10$.

Οπότε $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ με πεδίο ορισμού $A = (0, 10)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ο ρυθμός μεταβολής της ως προς το x είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} (100 - x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad x \in (0, 10)$$

Για $x = 8$ έχουμε: $f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100 - 64}} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100 - x^2} - 8) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x - 6) \cdot (x + 6)}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

$\Delta 4.$ Εξετάζω την f ως προς τη μονοτονία.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} \text{ με } x \in (0, 10) \text{ και } \sqrt{100 - x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in A$. Οπότε f γνησίως φθίνουσα στο A .

Τότε έχουμε: $x_1 < x_3 < x_2$ άρα $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
 ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
 ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ
 ΚΩΣΤΑΣ ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ • ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΑΗ ΚΕΛΛΥ • ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΡΟΓΛΑΚΗ
 ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ • ΑΓΓΕΛΟΣ ΜΑΘΙΟΥΛΑΚΗΣ